

TEST DE PRESELECTION AU CONCOURS D'ENTREE DANS LES ECOLES DE STATISTIQUE

OPTION : ISE/ITS (ECONOMIE)

Durée : 2 heures

Exercice n°1 :

Soient $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ et $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x, y, z)$ et $v \circ u(x, y)$.
2. Soit $B_2 = \{E_1, E_2\}$ et $B_3 = \{F_1, F_2, F_3\}$ les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Montrer que $B'_2 = \{E'_1, E'_2\}$ et $B'_3 = \{F'_1, F'_2, F'_3\}$ sont des bases de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement, où $E'_1 = E_1, E'_2 = E_1 - E_2, F'_1 = F_1, F'_2 = F_1 + F_2$ et $F'_3 = F_1 + F_2 + F_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base B_2 à la base B'_2 puis la matrice Q de passage de la base B_3 à la base B'_3 .
4. Ecrire la matrice de u dans les bases B'_2 et B_3 puis dans les bases B'_2 et B'_3 et enfin celle de v dans les bases B'_3 et B'_2 .

Exercice n°2 :

Soit f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt$$

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.
2. En déduire que $f + g^2$ est une constante et calculer cette constante.
3. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
5. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.